Профессиональное образовательное учреждение

«КОЛЛЕДЖ БИЗНЕС-МЕНЕДЖМЕНТА,

ЭКОНОМИКИ И ПРАВА»

Дата: 13.05.2020г.
Специальность:
Курс: 1-й
Дисциплина: Математика
Преподаватель: Гаджиева А.Х.

Лекция №4:

Тема. **Логарифмические неравенства. Системы логарифмических неравенств**

План;

1.Рассмотреть метод решения логарифмических неравенств, основанный на .свойствах логарифмической функции.

2. Разобрать виды логарифмических неравенствах и систем логарифмических неравенств.

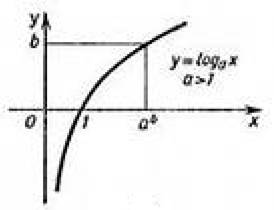
Теория

Схема решения логарифмических неравенств

На предыдущей лекции мы рассмотрели решение логарифмических уравнений и их систем. Сейчас речь пойдет о логарифмических неравенствах и их системах.

Мы уже говорили о логарифмической функции и ее свойствах. Важным свойством, которым мы пользовались для решения логарифмических уравнений: монотонность.

Для $a > 1$ график логарифмической функции выглядит следующим образом:



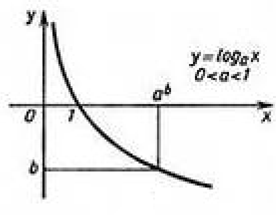
$y = \log_a x$ - возрастающая функция: чем больше x, тем больше y.

Значит, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$. В отличие от уравнений, здесь проверкой обойтись не удастся, поэтому необходимо учитывать ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Объединяя, получаем: $f(x) \geq g(x) > 0$.

$$\begin{cases} a > 1 \\ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$$

Для $0 < a < 1$ график логарифмической функции выглядит следующим образом:



$y = \log_a x$ - убывающая функция: чем больше x, тем меньше y.
Значит, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$.

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Объединяя, получаем: $0 < f(x) \leq g(x)$.

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$$.

Проверка ОДЗ при решении логарифмических неравенств

Лучше всего начинать решение неравенств с проверки ОДЗ. Поскольку даже на первом шаге решения можно получить выражение с измененной ОДЗ.

Например:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x-3) \geq 1$$

ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1 \\ x > 3 \end{cases}$

$x > 3$

А после преобразований: $\log_3(x+1)(x-3) \geq 1$

ОДЗ: $(x+1)(x-3) > 0$

$x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Как быстро определить знак логарифма

Рассмотрим такой полезный факт: как быстро определить знак логарифма?

Рассмотрим два случая:

1) $a > 1$: $\log_a b > 0 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 \Rightarrow \begin{cases} b > 1 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow b > 1$.

2) $0 < a < 1$: $\log_a b > 0 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 \Rightarrow \begin{cases} b < 1 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < b < 1$

Таким образом, $\log_a b > 0$, если a и b лежат по одну сторону от 1, и $\log_a b < 0$, если a и b лежат по разные стороны от 1.

Основные виды логарифмических неравенств

1) Простейшие $(\log_2 x > -1)$

2) Сводящиеся к простейшим $\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x+3)\right)$

3) С использованием свойств логарифмов $(\log_2(x+1) + \log_2(x-1) \leq 2)$

4) С заменой $(\log_2^2 x - \log_2 x - 2 \leq 0)$

5) С переменной в основании $(\log_x 2 \leq 1)$

Пример 1.

Решить неравенство $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$.

Решение:

Основание логарифма 3 > 1, значит используем 1 схему.

$\begin{cases} 2x - 4 > 14 - x \\ 2x - 4 > 0 \\ 14 - x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 6 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases}$; $6 < x < 14$.

Ответ: (6; 14)

Пример 2.

Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 2$.

Решение:

Выполним преобразование правой части: заменим $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ и используем свойство суммы логарифмов.

$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 9;$

$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(9 \cdot (x-1))$

Основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, значит используем 2 схему.

$\begin{cases} x+15 \leq 9 \cdot (x-1) \\ x+15 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -8x \leq -24 \\ x > -15 \\ x > 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 3 \\ x > -15 \\ x > 1 \end{cases}$; $x \geq 3$.

Ответ: $[3; +\infty)$

Системы логарифмических неравенств

Системы логарифмических неравенств решаются аналогично системам показательных неравенств: каждое из неравенств решается по отдельности, а затем находится пересечение.

Домашнее задание:

Тренажер 7

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенство.

1. $\log_2 x > 3$
2. $\log_{\frac{1}{3}} 2x > -2$
3. $\log_5(3x - 1) < 1$
4. $\log_3(2 - 4x) \leq 1$
5. $\log_{0,5}(1 + 2x) > -1$
6. $\log_{\frac{1}{7}}(5x + 3) \geq -\frac{1}{2}$
7. $\log_2(x^2 - 2x) \geq 3$
8. $\log_3(13 - 4^x) > 2$
9. $\log_{\frac{1}{5}}(26 - 3^x) > -2$
10. $\log_7(2 - x) \leq \log_7(3x + 6)$
11. $\log_{0,3}(1 - 2x) \geq \log_{0,3}(5x + 25)$
12. $\log_{0,5}(x^2 + 1) \leq \log_{0,5}(2x - 5)$